**به نام او**

**پاسخ تمرینات سری پنجم – فصل ششم**

1. الف) صحیح – اما هر مجموعه متشکل از بردارهای **غیرصفر**، مستقل خطی است.

ب) صحیح – طبق قضیه کتاب.

ج) صحیح – طبق متن کتاب، پاراگرافِ قبل از

د) صحیح - طبق متن کتاب، پاراگرافِ قبل از

ه) صحیح - با استناد به .

و) غلط – با توجه به اثبات قضیه ۸ کتاب که مربوط به است (بهتر است به روابط اشاره شود) .

ی) صحیح – می‌دانیم طبق متن کتاب (پاراگرافِ قبل از قضیه 9) اگر در باشد آنگاه .

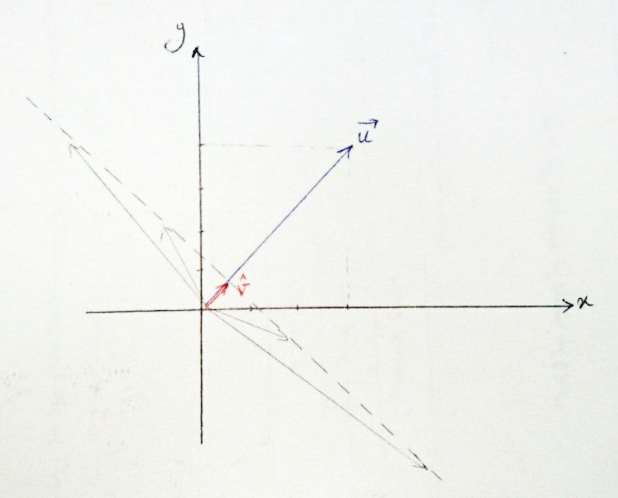
2. قسمت اول: فرض کنیم . در این صورت:

قسمت دوم: فرض کنیم . باید ثابت کنیم .

در حالتی که باشد، کافیست را در فرض مسئله جایگذاری کنیم تا حکم به سادگی بدست آید.

اما اگر باشد، نتیجه می‌گیریم که و در نتیجه و حکم برقرار است.

3. اگر ماتریس را در نظر بگیریم، می‌دانیم دترمینان این ماتریس برابر یا خواهد بود؛ چرا که پس و بنابراین . همچنین می‌دانیم اگر ستونی از ماتریس را در عددی ضرب کنیم دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود. بنابراین می‌توان به سادگی نتیجه گرفت که دترمینان ماتریس برابر یا خواهد بود.



4. ابتدا بردارهای و را رسم می‌کنیم:

طبق شکل رو به رو، مکان هندسی بردار برابر با خط‌چین خواهد بود که خطی عمود بر بردار می‌باشد.

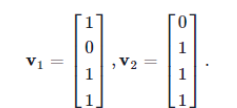
حال با مقایسه *و می‌توان دید 3حالت برای تعداد جواب‌های* بردار وجود دارد:

(چون پس )

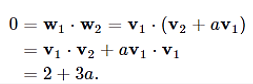
حالت اول: : در این حالت هیچ جوابی برای بردار وجود نخواهد داشت (*دایره به شعاع* و خط‌چین تقاطعی ندارند)

حالت دوم: : در این حالت تنها یک جواب برای بردار وجود دارد که آن هم خود است. یعنی  *و بردارهای و موازی‌اند (دایره به شعاع مماس بر خط‌چین است)*

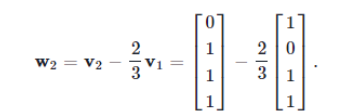
حالت سوم: : در این حالت بردار دارای 2جواب خواهد بود (*دایره به شعاع* و خط‌چین در دو نقطه متقاطع‌اند)

5. فرض کنید:

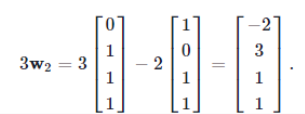
می‌توان با محاسبه ضرب داخلی این دو بردار نشان داد که متعامد نیستند؛ چرا که حاصل ضرب داخلیشان برابر با ۹ نیست.

بنابراین باید ابتدا یک پایه متعامد برای بیابیم. از روش گرم اشمیت استفاده می‌کنیم:

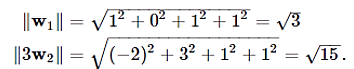
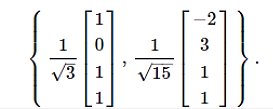
به این ترتیب

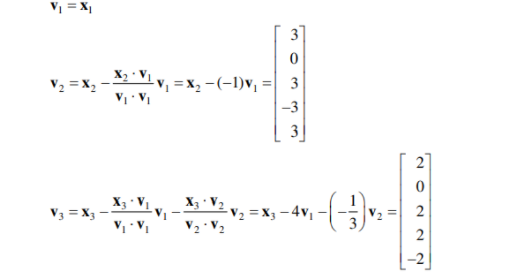


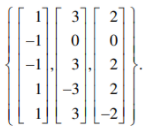
تغییر ابعاد متعامد بودن بردارها را تغییر نمی‎دهد. بنابراین برای رهایی از اعشار میتوان نوشت:



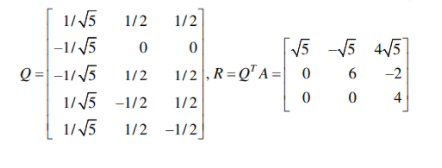
بنابراین مجموعه یک پایه متعامد برای است. ولی طول این بردارها یک نمی‌باشد بنابراین نیست. برای این تبدیل می‌توان نوشت:



6. ستون‌های ماتریس را و و درنظر بگیرید. ابتدا یک پایه متعامد پیدا می‌کنیم:



پایه متعامد برای آن:

ستون های ماتریس در تجزیه برابر با ورژن نرمال شده بردارهای بالا هستند:

7. با استفاده از روش به حل این سوال می‌پردازیم. با فرض به عنوان ماتریس ضرایب خواهیم داشت:

ابتدا باید ماتریس ضرایب را تشکیل بدهیم. هر سطر این ماتریس، ضرایب یکی از نقاط ماست:

حال ترانهاده این ماتریس را هم بدست می‌آوریم:

بردار هم براساس صورت سوال به این شکل است:

حال با حل معادله ذکر شده به پاسخ می‌رسیم.

8. با استناد به قضیه هر در را می‌توان منحصرا به صورت نوشت که p در و u در . با استفاده از قضیه 3 در بخش 6.1 می‌دانیم بنابراین در است.

سپس فرض کنید یک معادله است. فرض کنید یک پاسخ باشد و را به فرم مشابه آنچه گفته شد می‌نویسیم. سپس داریم بنابراین معادله حداقل یک پاسخ در دارد.

در نهایت فرض کنید و هردو در قرار دارند و هردو در معادله صدق می‌کنند. در است چرا که . معادله و هردو را به مجموع بردارهایی در و تجریه می‌کنند. با استناد به منحصربفرد بودن میتوان گفت و منحصربفرد است.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

بهار 1400